COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 62/I8

G. Sacerdoti e F. Uccelli:

ALCUNI STUDI SUL QUADRUPOLO ELICOIDALE

Nota interna: n° I22
IO Marzo I962

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Servizio Documentazione

LNF-62/18

Nota Interna n° 122
10 Marzo 1962

G. Sacerdoti e F. Uccelli(x):
ALCUNI STUDI SUL QUADRUPOLO ELICOIDALE

Introduzione

In questa relazione si studiano le condizioni di doppio focheggiamento di un quadrupolo elicoidale e come la presenza di un campo magnetico assiale costante generato da un solenoide posto tra le espansioni polari ne modifichi le caratteristiche ottiche. Questa possibilità rende notevolmente più ampio il campo di utilizzazione dello strumento.

1. - Condizioni di doppio focheggiamento

Le equazioni delle traiettorie sono le seguenti[1]:

$$
\begin{aligned}
x(y) = {} & x_1 \cos y\sqrt{k^2+\beta^2} + z_1' \frac{k}{\beta^2}\left(\cos y\sqrt{k^2-\beta^2} - \cos y\sqrt{k^2+\beta^2}\right) + \\
& + x_1'\left(\frac{\sqrt{k^2+\beta^2}}{\beta^2} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} - \frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2}\right) + \\
& + z_1 \frac{k}{\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
z(y) = {} & z_1 \cos y\sqrt{k^2-\beta^2} + x_1' \frac{k}{\beta^2}\left(\cos y\sqrt{k^2+\beta^2} - \cos y\sqrt{k^2-\beta^2}\right) + \\
& + z_1'\left(\frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} - \frac{\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta^2} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2}\right) - \\
& - x_1 \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(x) F. Uccelli - I.N.F.N., Sezione di Pisa

Le inclinazioni delle particelle sono:

$$\frac{\partial x(y)}{\partial y} = -X_1 \frac{\beta^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} + X_1' \cos y\sqrt{k^2+\beta^2} + Z_1' \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z(y)}{\partial y} = Z_1 \frac{\beta^2}{\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2} + Z_1' \cos y\sqrt{k^2-\beta^2} - X_1' \frac{k}{\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2} \tag{4}$$

ove X_1, Z_1, X_1', Z_1' sono rispettivamente le coordinate e le inclinazioni delle particelle all'entrata del quadrupolo elicoidale (v. fig. 1).

Poniamo le condizioni:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= p X_1' \\ Z_1 &= p Z_1' \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

avremo:

$$X(y) = X_1'\left(p \cos y\sqrt{k^2+\beta^2} + \frac{\sqrt{k^2+\beta^2}}{\beta^2} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} - \frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2}\right) + Z_1'\left(p \frac{k}{\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2} + \frac{k}{\beta^2} \cos y\sqrt{k^2-\beta^2} - \frac{k}{\beta^2} \cos y\sqrt{k^2+\beta^2}\right) \tag{6}$$

$$Z(y) = Z_1'\left(p \cos y\sqrt{k^2-\beta^2} - \frac{\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta^2} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2} + \frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2}\right) + X_1'\left(-p \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} + \frac{k}{\beta^2} \cos y\sqrt{k^2+\beta^2} - \frac{k}{\beta^2} \cos \sqrt{k^2-\beta^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y) = X_1'\left(-p \frac{\beta^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} + \cos y\sqrt{k^2+\beta^2}\right) + Z_1' \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2+\beta^2} \tag{8}$$

$$\frac{dz}{dy}(y) = Z_1'\left(p \frac{\beta^2}{\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2} + \cos y\sqrt{k^2-\beta^2}\right) - X_1' \frac{k}{\sqrt{k^2-\beta^2}} \sin y\sqrt{k^2-\beta^2} \tag{9}$$

le quali rappresentano le equazioni del moto di una particella emessa da una sorgente distante p dalla sezione di entrata del quadrupolo elicoidale.

Perchè si abbia doppio focheggiamento occorre che, per y = L (lunghezza del quadrupolo), siano soddisfatte le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} X_L &= -q\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_L \\ Z_L &= -q\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_L \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

(q > 0 esterno al quadrupolo)

Le relazioni (10) devono essere soddisfatte per qualsiasi X' e Z'. Sostituendo nelle (10) le equazioni (6), (7), (8) e (9) si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} &p\cos L\sqrt{k^2-\beta^2} - \frac{\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta^2}\sin L\sqrt{k^2-\beta^2} + \frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2+\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2+\beta^2} = \\ &= -q\left(\cos L\sqrt{k^2-\beta^2} + p\,\frac{\beta^2}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}\right) \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &p\,\frac{1}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2-\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\left(\cos L\sqrt{k^2-\beta^2} - \cos L\sqrt{k^2+\beta^2}\right) = \\ &= -q\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2+\beta^2}\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} &p\cos L\sqrt{k^2+\beta^2} + \frac{\sqrt{k^2+\beta^2}}{\beta^2}\sin L\sqrt{k^2+\beta^2} - \frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2-\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2-\beta^2} = \\ &= -q\left(-p\,\frac{\beta^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2+\beta^2} + \cos L\sqrt{k^2+\beta^2}\right) \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} &p\,\frac{1}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2+\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\left(\cos L\sqrt{k^2-\beta^2} - \cos L\sqrt{k^2+\beta^2}\right) = \\ &= -q\left(\frac{1}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}\right) \end{aligned} \qquad (14)$$

Il sistema è costituito da 4 equazioni nelle 5 incognite K, β, L, p, q.

Sottraendo la (12) dalla (14) si ottiene la relazione:

$$p\left(\frac{\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}}{\sqrt{k^2-\beta^2}}-\frac{\sin L\sqrt{k^2+\beta^2}}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\right)=q\left(\frac{\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}}{\sqrt{k^2-\beta^2}}-\frac{\sin L\sqrt{k^2+\beta^2}}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\right) \qquad (15)$$

Questa relazione può essere soddisfatta in due modi:

A) $\quad p = q \qquad (16)$

B) $$\frac{\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}}{\sqrt{k^2-\beta^2}}=\frac{\sin L\sqrt{k^2+\beta^2}}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \qquad (17)$$

Nel caso A) il sistema diventa: (11),(12),(13),(16);
nel caso B) diventa invece: (11),(12),(13),(17).

<u>Caso A)</u>

Ponendo $p = q$ e sommando la (12) alla (14) si ottiene:

$$\cos L\sqrt{k^2-\beta^2}=\cos L\sqrt{k^2+\beta^2} \qquad (16')$$

da cui seguono due sottocasi:

a) $$\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}=\sin L\sqrt{k^2+\beta^2} \qquad (18)$$

b) $$\sin L\sqrt{k^2-\beta^2}=-\sin L\sqrt{k^2+\beta^2} \qquad (19)$$

Impiegando le (16),(16'),(18) si ottiene, dalle (11) e (13), sottraendole membro a membro:

$$\left[p^2\beta^2\left(\frac{1}{\sqrt{k^2-\beta^2}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\right)+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{k^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}}-\sqrt{k^2-\beta^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{k^2+\beta^2}+\frac{k^2}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\right)\right]\sin L\sqrt{k^2+\beta^2}=0 \qquad (20)$$

che dà luogo a due possibilità:

$$\sin L\sqrt{k^2+\beta^2}=0 \qquad (21)$$

$$p^2 = -\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\sqrt{K^2+\beta^2}-\sqrt{K^2-\beta^2}}{\sqrt{K^2+\beta^2}+\sqrt{K^2-\beta^2}} \tag{22}$$

La (22), tenendo conto che $\beta < K$, conduce a soluzioni immaginarie per p. Nel sottocaso b), impiegando cioè le (16),(16'), (19), si ottiene, dalle (11) e (13), sottraendole membro a membro, una relazione analoga alla (20), che porta ancora alla condizione (21).

La condizione (21) conduce necessariamente a:

$$\cos L\sqrt{K^2-\beta^2} = \cos L\sqrt{K^2+\beta^2} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \tag{23}$$

ma, sia nell'uno che nell'altro caso, le equazioni (11)e(13) danno:

$$p = -q$$

che, per esser compatibile con la (16), richiede che sia:

$$p = q = 0 .$$

La condizione (21), unita alla (18) e alla (18'), porta come conseguenza:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{K^2-\beta^2}\,L &= n_1\pi \\ \sqrt{K^2+\beta^2}\,L &= n_2\pi \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

con $n_2 = 2g + n_1$ $\qquad g, n_1 = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Le (24) forniscono le condizioni di focheggiamento all'interno di un quadrupolo elicoidale, che esamineremo dettagliamente in seguito.

Caso B)

Passiamo ora ad analizzare il caso B), in cui il sistema (11),(12),(13),(14) diviene (11),(12),(13),(17).
Sfruttando la (17), otteniamo dalle (11),(12),(13):

$$(p+q)\cos L\sqrt{K^2-\beta^2}+\frac{\sin L\sqrt{K^2+\beta^2}}{\sqrt{K^2+\beta^2}}+pq\beta^2\frac{\sin L\sqrt{K^2+\beta^2}}{\sqrt{K^2+\beta^2}}=0 \tag{25}$$

$$(p+q)\cos L\sqrt{K^2+\beta^2}-\frac{\sin L\sqrt{K^2+\beta^2}}{\sqrt{K^2+\beta^2}}-pq\beta^2\frac{\sin L\sqrt{K^2+\beta^2}}{\sqrt{K^2+\beta^2}}=0 \tag{26}$$

$$(p+q)\frac{\sin L\sqrt{K^2+\beta^2}}{\sqrt{K^2+\beta^2}}=\frac{1}{\beta^2}\left(\cos L\sqrt{K^2+\beta^2}-\cos L\sqrt{K^2-\beta^2}\right) \tag{27}$$

Sottraendo la (25) dalla (26) e usando la (27), si ottiene facilmente:

$$(p+q)^2-2\,pq=0$$

che conduce anch'essa alla condizione $p = q = 0$ (o a soluzioni immaginarie).

Possiamo così concludere che nel caso di un campo quadrupolare elicoidale non esistono condizioni di doppio focheggiamento all'esterno del quadrupolo.

2. - Focheggiamento interno

Le condizioni (24) si possono scrivere:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{K}\right)^2}\;KL &= n_1\pi\\ \sqrt{1+\left(\frac{\beta}{K}\right)^2}\;KL &= n_2\pi\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

e, ponendo $\theta = KL$, otteniamo, risolvendo il sistema:

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n_1^2+n_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ \beta/K &= \left(\frac{n_2^2-n_1^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ricordando che è $n_2 = 2g + n_1$, ove $n_1, g = 0,1,2,3,4,\ldots\ldots$, otteniamo (v. fig. 2) le condizioni di focheggiamento interno.

I punti rappresentativi forniscono i valori di θ=KL e di β/K cercati. A fianco di ciascun punto, tra parentesi, abbiamo riportato i valori di n_1 e di n_2.

Come abbiamo visto, non esiste possibilità di focheggiare esternamente i fasci con il quadrupolo elicoidale, senza cambiarne la spiralizzazione o senza ricorrere ad altri dispositivi.

Per raggiungere questo scopo, e per dare al quadrupolo elicoidale un più vasto campo di applicazione, abbiamo pensato(x) di sovrapporre al campo quadrupolare elicoidale a spiralizzazione costante un campo assiale prodotto da un solenoide e ne abbiamo tratto la matrice di trasferimento e le equazioni di moto delle particelle che vi transitano.

3. - <u>Equazioni delle traiettorie di particelle in un campo quadrupolare elicoidale sovrapposto a campo magnetico assiale costante</u>

La matrice complessiva di un tratto lineare infinitesimo di spazio in cui è presente un campo quadrupolare elicoidale sovrapposto a campo assiale, risulta:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \ell & K\ell & 0 \\ -\beta^2\ell & 1 & 0 & \ell(\alpha+K) \\ -K\ell & 0 & 1 & \ell \\ 0 & -\ell(\alpha+K) & \beta^2\ell & 1 \end{vmatrix}$$

Essa deriva dal prodotto delle tre matrici seguenti[2]:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & K\ell & 0 \\ -\beta^2\ell & 1 & 0 & K\ell \\ -K\ell & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -K\ell & \beta^2\ell & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha\ell \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha\ell & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Le matrici sono caratteristiche, rispettivamente, di un tratto lineare di lunghezza l, del quadrupolo elicoidale, del solenoide sovrapposto ad esso(o).

(x) su suggerimento dell'Ing. Uccelli.

(o) v. referenze.

Le grandezze che ivi intervengono, sono:

ℓ spessore del tratto (infinitesimo) in cm;

α = eB/p (cm^{-1});

K = θ/L spiralizzazione (cm^{-1});

$\beta = \sqrt{\dfrac{\partial B_z}{\partial x}\,\dfrac{3\cdot 10^{-4}}{p}}$ caratteristica del campo quadrupolare (cm^{-1}).

L'equazione secolare è:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & \ell & K\ell & 0 \\ -\beta^2\ell & (1-\lambda) & 0 & \ell(\alpha+K) \\ -K\ell & 0 & (1-\lambda) & \ell \\ 0 & -\ell(\alpha+K) & \beta^2\ell & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando, abbiamo:

$$(1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2-\beta^2\ell^2]+(1-\lambda)^2(\alpha+K)^2\ell^2+$$
$$+\beta^2\ell^2[(1-\lambda)^2-\beta^2\ell^2]+\beta^2\ell^4K(\alpha+K)+$$
$$+K^2\ell^2[(1-\lambda)^2+(\alpha+K)^2\ell^2]-\beta^2\ell^4K(\alpha+K)=0$$

da cui:

$$(1-\lambda)^4+(1-\lambda)^2[(\alpha+K)^2+K^2]\ell^2+\ell^4[K^2(\alpha+K)^2-\beta^4]=0$$

Le soluzioni risultano essere:

$$1-\lambda_1=+\ell_u=+\ell\sqrt{-\frac{K^2+(\alpha+K)^2}{2}+\sqrt{\frac{[K^2-(\alpha+K)^2]^2}{4}+\beta^4}}=\ell i\sqrt{-}$$

$$1-\lambda_2=-\ell_u=-\ell\sqrt{-\frac{K^2+(\alpha+K)^2}{2}+\sqrt{\frac{[K^2-(\alpha+K)^2]^2}{4}+\beta^4}}=-\ell i\sqrt{-}$$

$$1-\lambda_3=+\ell_z=+\ell\sqrt{-\frac{K^2+(\alpha+K)^2}{2}-\sqrt{\frac{[K^2-(\alpha+K)^2]^2}{4}+\beta^4}}=\ell i\sqrt{+}$$

$$1-\lambda_4=-\ell_z=-\ell\sqrt{\frac{K^2+(\alpha+K)^2}{2}-\sqrt{\frac{[K^2-(\alpha+K)^2]^2}{4}+\beta^4}}=-\ell i\sqrt{+}$$

Perchè si abbiano soluzioni convergenti, dovrà essere:

$$\left[\frac{K^2-(\alpha+K)^2}{2}\right]^2+\beta^4<\left[\frac{K^2+(\alpha+K)^2}{2}\right]^2$$

cioè:

$$\beta^2 < (\alpha + K)K$$

Occorre ora passare alla ricerca della matrice caratteristica di un tratto finito;per far ciò useremo il metodo di diagonalizzazione e faremo poi tendere a zero α per eliminarne i termini di grado superiore al primo nei coefficienti degli elementi della matrice.

Otteremo (i calcoli sono sviluppati per esteso in appendice 1):

(vedi pagg. 10 e 11)

Le equazioni delle traiettorie si ottengono dalla relazione:

$$\begin{vmatrix} X_L \\ X'_L \\ Z_L \\ Z'_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M \end{vmatrix}^u \begin{vmatrix} X_1 \\ X'_1 \\ Z_1 \\ Z'_1 \end{vmatrix}$$

e risultano:

$$\begin{aligned} X_L = {} & X_1\left[\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K} + \frac{\alpha K}{2\beta^2}\left(\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K} - \cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right)\right] + \\ & + X'_1\left[\frac{\sqrt{K^2+\beta^2}}{\beta^2}\left(1+\frac{\alpha K}{2(K^2+\beta^2)}\right)\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K} - \frac{K^2}{\beta^2\sqrt{K^2-\beta^2}}\left\{1+\frac{\alpha}{2K}\left(1-\frac{\alpha}{K^2-\beta^2}\right)\right\}\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right] + \\ & + Z_1\left[\frac{K}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left\{1+\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{\beta^2}-\frac{\beta^2}{K^2-\beta^2}\right)\right\}\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K} - \frac{\alpha\sqrt{K^2+\beta^2}}{2\beta^2}\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right] + \\ & + Z'_1\left[\frac{K}{\beta^2}\left(1+\frac{\alpha}{2K}\right)\left(\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K} - \cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_L = {} & -X_1\left[\frac{\beta^2}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left(1-\frac{\alpha K}{2(K^2+\beta^2)}\right)\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right] + \\ & + X'_1\left[\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K} + \frac{\alpha K}{2\beta^2}\left(\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K} - \cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right)\right] + \\ & + Z_1\left[\frac{\alpha}{2}\left(\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K} - \cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right)\right] + \\ & + Z'_1\left[\frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left\{1+\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{K^2+\beta^2}\right)\right\}\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K} - \frac{\alpha\sqrt{K^2-\beta^2}}{2\beta^2}\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right] \end{aligned}$$

(segue pag. 12)

$$|M|^{n} =$$

$$\frac{\alpha k}{2\beta^2}\cos\sqrt{-} - \left(\frac{\alpha k}{2\beta^2} - 1\right)\cos\sqrt{+}\ ; \quad -\frac{k^2}{\beta^2\sqrt{k^2-\beta^2}}\left[1 + \frac{\alpha}{2k}\left(1 - \frac{\beta^2}{k^2-\beta^2}\right)\right]\sin\sqrt{-} + \frac{\sqrt{k^2+\beta^2}}{\beta^2}\left(1 + \frac{\alpha k}{2(k^2+\beta^2)}\right)\sin\sqrt{+}\ ;$$

$$-\frac{\beta^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\left(1 - \frac{\alpha k}{2(k^2+\beta^2)}\right)\sin\sqrt{+}\ ; \quad -\frac{\alpha k}{2\beta^2}\cos\sqrt{-} + \left(\frac{\alpha k}{2\beta^2} + 1\right)\cos\sqrt{+}\ ;$$

$$-\frac{\alpha\sqrt{k^2-\beta^2}}{2\beta^2}\sin\sqrt{-} - \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\left[1 - \frac{\alpha}{2k}\left(\frac{k^2}{k^2+\beta^2} + \frac{k^2-\beta^2}{\beta^2}\right)\right]\sin\sqrt{+}\ ; \quad -\frac{k}{\beta^2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\sqrt{-} + \frac{k}{\beta^2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\sqrt{+}\ ;$$

$$\frac{\alpha}{2}\cos\sqrt{-} - \frac{\alpha}{2}\cos\sqrt{+}\ ; \quad -\frac{k}{\sqrt{k^2-\beta^2}}\left[1 - \frac{\alpha}{2k}\left(\frac{k^2-\beta^2}{\beta^2} + \frac{k^2}{k^2-\beta^2}\right)\right]\sin\sqrt{-} - \frac{\alpha\sqrt{k^2-\beta^2}}{2\beta^2}\sin\sqrt{+}\ ;$$

N.B.: $\cos\sqrt{+} = \cos L\sqrt{k^2+\beta^2+\alpha k}$; $\cos\sqrt{-} = \cos L\sqrt{k^2-\beta^2+\alpha k}$; etc.

$$\frac{K}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left[1-\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{\beta^2}-\frac{\beta^2}{K^2-\beta^2}\right)\right]\sin\sqrt{-} - \frac{\alpha\sqrt{K^2+\beta^2}}{2\beta^2}\sin\sqrt{+}\,;\ \frac{\alpha+2K}{2\beta^2}\cos\sqrt{-} - \frac{\alpha+2K}{2\beta^2}\cos\sqrt{+}$$

$$\frac{\alpha}{2}\cos\sqrt{-} - \frac{\alpha}{2}\cos\sqrt{+}\,;\ -\frac{\alpha\sqrt{K^2-\beta^2}}{2\beta^2}\sin\sqrt{-} + \frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left[1+\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{K^2+\beta^2}\right)\right]\sin\sqrt{+}$$

$$\left(1+\frac{\alpha K}{2\beta^2}\right)\cos\sqrt{-} - \frac{\alpha K}{2\beta^2}\cos\sqrt{+}\,;\ -\frac{\sqrt{K^2-\beta^2}}{\beta^2}\left[1+\frac{\alpha K}{2(K^2-\beta^2)}\right]\sin\sqrt{-} + \frac{K^2}{\beta^2\sqrt{K^2+\beta^2}}\left[1+\frac{\alpha}{2K}\left(1+\frac{\beta^2}{K^2+\beta^2}\right)\right]\sin\sqrt{+}$$

$$\frac{\beta^2}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left(1-\frac{\alpha K}{2(K^2-\beta^2)}\right)\sin\sqrt{-} + 0\,;\ -\left(\frac{\alpha K}{2\beta^2}-1\right)\cos\sqrt{-} + \frac{\alpha K}{2\beta^2}\cos\sqrt{+}$$

$$Z_L = -X_1\left[\frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left\{1-\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{K^2+\beta^2}+\frac{K^2-\beta^2}{\beta^2}\right)\right\}\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}+\frac{\alpha\sqrt{K^2-\beta^2}}{2\beta^2}\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right]+$$
$$+X_1'\left[\frac{K}{\beta^2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left\{\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}-\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right\}\right]+$$
$$+Z_1\left[\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}+\frac{\alpha K}{2\beta^2}\left(\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}-\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right)\right]+$$
$$+Z_1'\left[\frac{K^2}{\beta^2\sqrt{K^2+\beta^2}}\left\{1+\frac{\alpha}{2K}\left(1+\frac{\beta^2}{K^2+\beta^2}\right)\right\}\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}-\frac{\sqrt{K^2-\beta^2}}{\beta^2}\left\{1+\frac{\alpha K}{2(K^2-\beta^2)}\right\}\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right]$$

$$Z_L' = X_1\left[\frac{\alpha}{2}\left(\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}-\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}\right)\right]+$$
$$-X_1'\left[\frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left\{1-\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2-\beta^2}{\beta^2}+\frac{K^2}{K^2+\beta^2}\right)\right\}\sin L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}+\frac{\alpha\sqrt{K^2-\beta^2}}{2\beta^2}\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right]+$$
$$+Z_1\left[\frac{\beta^2}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left(1-\frac{\alpha K}{2(K^2-\beta^2)}\right)\sin L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right]+$$
$$+Z_1'\left[\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}+\frac{\alpha K}{2\beta^2}\left(\cos L\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}-\cos L\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}\right)\right]$$

Da esse si può agevolmente vedere la dipendenza delle traiettorie da un campo assiale costante e calcolarne l'entità.

Le condizioni di focheggiamento interno ed esterno formeranno oggetto di un prossimo studio, che definirà più esattamente le proprietà di un quadrupolo così modificato.

4. - Calcolo dell'accettanza massima di un quadrupolo elicoidale

Usando la formula (4) della nota interna n°103 dei Laboratori di Frascati si può ottenere l'accettanza massima, nello spazio delle fasi, del quadrupolo elicoidale. Infatti possiamo scrivere(3):

$$A_{max} = \int A\,dp = \frac{4.92\times 10^{-8}\,B^4}{(dB/dx)^3}\times\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$$

ed essendo

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = 0.512$$

otteniamo:

$$A_{max} = 2.48 \times 10^{-8} \frac{B^4}{(dB/dx)^3}$$

formula che esprime il valore dell'accettanza totale su tutti i momenti consentiti al quadrupolo elicoidale dalla condizione $\beta < K$.

^^^^^^^^^^

Ringraziamo il Centro Studi CSCE di Pisa che ci ha permesso di controllare numericamente alcuni risultati ottenuti ed in particolar modo i Proff. Barbuti e Ghelardoni.

^^^^^^^^^^

Referenze:

(1) G. Sacerdoti: Proprietà ottiche di un quadrupolo magnetico elicoidale - L'Elettrotecnica 47, 322 (1960)

(2) D.N. Edwards and B. Rose: An extension of the transfer matrix method to a beam transport system containing a solenoid - Nucl. Instr. 7, 135 (1960)

(3) G. Sacerdoti: Calcolo dell'accettanza massima di un quadrupolo elicoidale infinitamente lungo - Laboratori Nazionali di Frascati, LNF 61/63 (1961).

APPENDICE 1

Per diagonalizzare la matrice $|M|$ imporremo che sia:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ell & K\ell & 0 \\ -\beta^2\ell & 1 & 0 & \ell(\alpha+K) \\ -K\ell & 0 & 1 & \ell \\ 0 & -\ell(\alpha+K) & \beta^2\ell & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{u\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-z\ell} \end{vmatrix}$$

Eseguendo i calcoli, la matrice diagonalizzante $|m_{ik}|$ risulta essere:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{A(u)}{uB} & \frac{A(u)}{uB} & -\frac{A(z)}{zB} & \frac{A(z)}{zB} \\ \frac{u}{K}+\frac{A(u)}{KuB} & -\left[\frac{u}{K}+\frac{A(u)}{KuB}\right] & \frac{z}{K}+\frac{A(z)}{KzB} & -\left[\frac{z}{K}+\frac{A(z)}{KzB}\right] \\ \frac{\beta^2}{\alpha+K}-\frac{A(u)}{(\alpha+K)B} & \frac{\beta^2}{\alpha+K}-\frac{A(u)}{(\alpha+K)B} & \frac{\beta^2}{\alpha+K}-\frac{A(z)}{(\alpha+K)B} & \frac{\beta^2}{\alpha+K}-\frac{A(z)}{(\alpha+K)B} \end{vmatrix} = |m_{ik}|$$

con:

$$A(u) = \frac{\beta^2}{\alpha+K} - \frac{u^2}{K} - K$$

$$A(z) = \frac{\beta^2}{\alpha+K} - \frac{z^2}{K} - K$$

$$B = \left(\frac{1}{\alpha+K} + \frac{1}{K}\right)$$

Poniamo ora:

$$\frac{A^{(u)}}{B} = C^{(u)} \ ; \qquad \frac{A^{(z)}}{B} = C^{(z)} \ ;$$

$$\frac{u^2 B + A^{(u)}}{KB} = D_u \ ; \qquad \frac{z^2 B + A^{(z)}}{KB} = D_z \ ;$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha + K} - \frac{A^{(u)}}{(\alpha+K)B} = E_u \ ; \qquad \frac{\beta^2}{\alpha+K} - \frac{A^{(z)}}{(\alpha+K)B} = E_z \ .$$

La matrice $|m_{ik}|$ diviene:

$$|m_{ik}| \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{C(u)}{u} & \frac{C(u)}{u} & -\frac{C(z)}{z} & \frac{C(z)}{z} \\ \frac{D(u)}{u} & -\frac{D(u)}{u} & \frac{D(z)}{z} & -\frac{D(z)}{z} \\ E_{(u)} & E_{(u)} & E_{(z)} & E_{(z)} \end{vmatrix}$$

Calcoliamone ora la trasposta $|m_{ki}^{-1}|$. Essa risulta pari a:

$$|m_{ki}^{-1}| \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{E_{(z)}}{E_{(z)}-E_{(u)}} \ ; & -\frac{1}{2}\frac{u D_{(z)}}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & -\frac{1}{2}\frac{u C_z}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & -\frac{1}{2}\frac{1}{E_z-E_u} \\ \frac{1}{2}\frac{E_{(z)}}{E_{(z)}-E_{(u)}} \ ; & \frac{1}{2}\frac{u D_{(z)}}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & \frac{1}{2}\frac{u C_z}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & -\frac{1}{2}\frac{1}{E_z-E_u} \\ -\frac{1}{2}\frac{E_{(u)}}{E_{(z)}-E_{(u)}} \ ; & \frac{1}{2}\frac{z D_{(u)}}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & \frac{1}{2}\frac{z C_u}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & \frac{1}{2}\frac{1}{E_z-E_u} \\ -\frac{1}{2}\frac{E_{(u)}}{E_{(z)}-E_{(u)}} \ ; & -\frac{1}{2}\frac{z D_{(u)}}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & -\frac{1}{2}\frac{z C_u}{C_{(u)}D_{(z)}-C_{(z)}D_{(u)}} \ ; & \frac{1}{2}\frac{1}{E_z-E_u} \end{vmatrix}$$

e, sapendo che è:

$$|M|^n = |m_{ik}| \, |\lambda^n| \, |m_{ki}^{-1}|$$

otteniamo:

$$\left|M\right|^{n} =$$

$$\left|\begin{array}{ll}
\frac{E_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_u l}+e^{-u_u l}}{2}\right)-\frac{E_u}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_z l}+e^{-u_z l}}{2}\right); & -\frac{u_z D_z}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_u l}-e^{-u_u l}}{2z}\right)+\frac{u_z D_u}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_z l}-e^{-u_z l}}{2u}\right); \\
-\frac{C_u E_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_u l}-e^{-u_u l}}{2u}\right)+\frac{C_z E_u}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_z l}-e^{-u_z l}}{2z}\right); & \frac{C_u D_z}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_u l}+e^{-u_u l}}{2}\right)-\frac{C_z D_u}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_z l}+e^{-u_z l}}{2}\right); \\
\frac{D_u E_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_u l}-e^{-u_u l}}{2u}\right)-\frac{D_z E_u}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_z l}-e^{-u_z l}}{2z}\right); & -\frac{D_u D_z}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_u l}+e^{-u_u l}}{2}\right)+\frac{D_z D_u}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_z l}+e^{-u_z l}}{2}\right); \\
\frac{E_u E_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_u l}+e^{-u_u l}}{2}\right)-\frac{E_u E_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{u_z l}+e^{-u_z l}}{2}\right); & -\frac{u_z E_u D_z}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_u l}-e^{-u_u l}}{2z}\right)+\frac{u_z E_z D_u}{C_u D_z-C_z D_u}\left(\frac{e^{u_z l}-e^{-u_z l}}{2u}\right);
\end{array}\right.$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$-\frac{uzC_z}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uul}-e^{-uul}}{2z}\right)+\frac{uzC_u}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uzl}-e^{-uzl}}{2u}\right);\ -\frac{1}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uul}+e^{-uul}}{2}\right)+\frac{1}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uzl}+e^{-uzl}}{2}\right)$$

$$\frac{C_uC_z}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uul}+e^{-uul}}{2}\right)-\frac{C_zC_u}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uzl}+e^{-uzl}}{2}\right);\ \frac{C_u}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uul}-e^{-uul}}{2u}\right)-\frac{C_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uzl}-e^{-uzl}}{2z}\right)$$

$$-\frac{C_zD_u}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uul}+e^{-uul}}{2}\right)+\frac{C_uD_z}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uzl}+e^{-uzl}}{2}\right);\ -\frac{D_u}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uul}-e^{-uul}}{2u}\right)+\frac{D_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uzl}-e^{-uzl}}{2z}\right)$$

$$-\frac{u_zE_uC_z}{C_uD_z-C_zD_u}\left(\frac{e^{uul}-e^{-uul}}{2z}\right)+\frac{uzE_zC_u}{C_zD_u-C_uD_z}\left(\frac{e^{uzl}-e^{-uzl}}{2u}\right);\ -\frac{E_u}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uul}+e^{-uul}}{2}\right)+\frac{E_z}{E_z-E_u}\left(\frac{e^{uzl}+e^{-uzl}}{2}\right)$$

Ora occore sostituire i valori delle funzioni in ciascuno dei coefficienti, facendo poi tendere $\alpha \to 0$.

I coefficienti della $\left| M \right|^n$ sono:

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{K^2+(\alpha+K)^2}{2} - \sqrt{\frac{(K^2-(\alpha+K)^2)^2}{4}+\beta^4}} = \sqrt{K^2+\alpha K - \sqrt{\alpha^2K^2+\beta^4}} =$$

$$= \sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K} = \sqrt{K^2-\beta^2} + \frac{\alpha K}{2\sqrt{K^2-\beta^2}}$$

$$u^2 = -\left[K^2-\beta^2+\alpha K\right]$$

$$\frac{z}{i} = \sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K} = \sqrt{K^2+\beta^2} + \frac{\alpha K}{2\sqrt{K^2+\beta^2}}$$

$$z^2 = -\left[K^2+\beta^2+\alpha K\right]$$

$$\frac{1}{E_z-E_u} = \frac{1}{\frac{1}{(\alpha+K)B}(A_u-A_z)} = \frac{\alpha+2K}{K(A_u-A_z)} = \frac{\alpha+2K}{z^2-u^2} = -\frac{\alpha+2K}{2\beta^2}$$

$$\frac{E_z}{E_z-E_u} = \frac{B\beta^2-A(z)}{A(u)-A(z)} = \frac{\beta^2+z^2+K^2}{z^2-u^2} = \frac{\alpha K}{2\beta^2}$$

$$\frac{E_u}{E_z-E_u} = \frac{\beta^2+u^2+K^2}{z^2-u^2} = \frac{\alpha K}{2\beta^2} - 1$$

$$E(u) = \frac{\beta^2}{K} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta^2}{K^2}+1\right)$$

$$E_z = -\frac{\alpha}{2}$$

$$C_u = \frac{A(z)}{B} = \frac{\alpha(K^2-\beta^2)}{2K}$$

$$C_z = \frac{A_z}{B} = \frac{2K\beta^2+\alpha K^2+\alpha\beta^2}{2K+\alpha} = \frac{1}{2K}\left(1-\frac{\alpha}{2K}\right)(2K\beta^2+\alpha K^2+\alpha\beta^2) = \beta^2+\frac{\alpha K}{2}$$

$$\frac{C_u E_z}{\frac{u}{i}(E_z-E_u)} = \frac{\alpha(K^2-\beta^2)}{2K}\,\frac{\alpha K}{2\beta^2}\,\frac{1}{\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}} = 0$$

$$\frac{C_z E_u}{\frac{z}{i}(E_z-E_u)} = \left(\beta^2+\frac{\alpha K}{2}\right)\left(\frac{\alpha K}{2\beta^2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left(1-\frac{\alpha K}{2(K^2+\beta^2)}\right)$$

$$D_{(u)} = \frac{u^2 B + A(u)}{KB} = \frac{u^2}{K} + \frac{A(u)}{KB} = -\frac{K^2-\beta^2}{K} - \alpha\,\frac{(K^2+\beta^2)}{2K^2}$$

$$D_z = \frac{z^2 B + A(z)}{KB} = \frac{z^2}{K} + \frac{A(z)}{KB} = -\left(K + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{D_u E_z}{\frac{u}{i}(E_z - E_u)} = -\left(\frac{K^2-\beta^2}{K} + \alpha\,\frac{K^2+\beta^2}{2K^2}\right)\frac{\alpha K}{2\beta^2}\,\frac{1}{\sqrt{K^2-\beta^2+\alpha K}} = -\frac{\alpha\sqrt{K^2-\beta^2}}{2\beta^2}$$

$$\frac{D_z E_u}{\frac{z}{i}(E_z - E_u)} = -\left(K + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha K}{2\beta^2} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{K^2+\beta^2+K\alpha}} = \left[K - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{K^2}{\beta^2} - 1\right)\right]\frac{1}{\sqrt{K^2+\beta^2+\alpha K}} =$$

$$= \frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left[1 - \frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{K^2+\beta^2} + \frac{K^2-\beta^2}{\beta^2}\right)\right]$$

$$\frac{E_u E_z}{E_z - E_u} = -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha K}{2\beta^2} - 1\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$C_u D_z - C_z D_u = \frac{2K\beta^2(K^2-\beta^2) + \alpha\beta^2(K^2+\beta^2)}{2K^2} = \frac{\beta^2}{K}\left[(K^2-\beta^2) + \frac{\alpha(K^2+\beta^2)}{2K}\right]$$

$$\frac{1}{C_u D_z - C_z D_u} = \frac{K}{\beta^2(K^2-\beta^2)}\left[1 - \frac{\alpha(K^2+\beta^2)}{2K(K^2-\beta^2)}\right]$$

$$C_u D_z = -\frac{\alpha}{2}(K^2-\beta^2)$$

$$C_z D_u = -\left[\beta^2\left(\frac{K^2-\beta^2}{K}\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{K^4+\beta^4}{K^2}\right)\right]$$

$$\frac{u z C_z}{\frac{z}{i}(C_u D_z - C_z D_u)} = \frac{i u C_z}{C_u D_z - C_z D_u} = -\frac{K}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left[1 - \frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{K^2-\beta^2}\right)\right]$$

$$\frac{E_u\, u z C_z}{\frac{z}{i}(C_u D_z - C_z D_u)} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left(1 - \frac{\alpha K}{2(K^2-\beta^2)}\right)$$

$$\frac{u z C_u}{\frac{u}{i}(C_u D_z - C_z D_u)} = \frac{i z C_u}{C_u D_z - C_z D_u} = -\frac{\alpha\sqrt{K^2+\beta^2}}{2\beta^2}$$

$$\frac{E_z\, u z C_u}{\frac{u}{i}(C_u D_z - C_z D_u)} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{\alpha\sqrt{K^2+\beta^2}}{2\beta^2} = 0$$

$$\frac{C_u}{(E_2-E_u)\frac{u}{i}} = -\frac{\alpha\sqrt{K^2-\beta^2}}{2\beta^2}$$

$$\frac{C_2}{(E_2-E_u)\frac{z}{i}} = -\frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left[1+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{K}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{K(K^2+\beta^2)}\right)\right] = -\frac{K}{\sqrt{K^2+\beta^2}}\left[1+\frac{\alpha}{2K}\left(\frac{K^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{K^2+\beta^2}\right)\right]$$

$$\frac{D_u}{(E_2-E_u)\frac{u}{i}} = \frac{\sqrt{K^2-\beta^2}}{\beta^2}\left[1+\frac{\alpha K}{2(K^2-\beta^2)}\right]$$

$$\frac{D_2}{(E_2-E_u)\frac{z}{i}} = \frac{K^2}{\beta^2\sqrt{K^2+\beta^2}}\left[1+\frac{\alpha}{2K}\left(1+\frac{\beta^2}{K^2+\beta^2}\right)\right]$$

$$\frac{C_u D_2}{C_u D_2 - C_2 D_u} = -\frac{\alpha K}{2\beta^2}$$

$$\frac{C_2 D_u}{C_u D_2 - C_2 D_u} = -\left[1+\frac{\alpha K}{2\beta^2}\right]$$

$$\frac{D_u D_2}{C_u D_2 - C_2 D_u} = \left[\frac{K^2-\beta^2}{K}+\frac{\alpha(K^2+\beta^2)}{2K^2}\right]\left(K+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{K}{\beta^2(K^2-\beta^2)}\left[1-\frac{\alpha(K^2+\beta^2)}{2K(K^2-\beta^2)}\right] = \frac{K}{\beta^2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{C_u C_2}{C_u D_2 - C_2 D_u} = \left(\beta^2+\frac{\alpha K}{2}\right)\left[\frac{\alpha(K^2-\beta^2)}{2K}\right]\frac{K}{\beta^2(K^2-\beta^2)}\left[1-\frac{\alpha(K^2+\beta^2)}{2K(K^2-\beta^2)}\right] = \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{u z D_2}{\frac{z}{i}(C_u D_2 - C_2 D_u)} = \frac{i u D_2}{C_u D_2 - C_2 D_u} = \frac{K^2}{\beta^2\sqrt{K^2-\beta^2}}\left[1+\frac{\alpha}{2K}\left(1-\frac{\beta^2}{K^2-\beta^2}\right)\right]$$

$$\frac{E_u\, u z D_2}{\frac{z}{i}(C_u D_2 - C_2 D_u)} = \frac{K}{\sqrt{K^2-\beta^2}}\left[1-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{K^2-\beta^2}{K\beta^2}+\frac{K}{K^2-\beta^2}\right)\right]$$

$$\frac{u z D_u}{\frac{u}{i}(C_u D_2 - C_2 D_u)} = \frac{i z D_u}{C_u D_2 - C_2 D_u} = \frac{\sqrt{K^2+\beta^2}}{\beta^2}\left(1+\frac{\alpha K}{2(K^2+\beta^2)}\right)$$

$$\frac{E_2\, u z D_u}{\frac{u}{i}(C_u D_2 - C_2 D_u)} = -\frac{\alpha\sqrt{K^2+\beta^2}}{2\beta^2}$$

Sostituendo i coefficienti così calcolati nella M^n, otteniamo la matrice di trasferimento relativa ad un quadrupolo di lunghezza L provvisto di campo assiale costante.

Detta matrice è riportata nel testo.